УДК 519.6

Савинов Ю.Г. Лабораторный практикум по численным методам. - М.: Изд-во МАИ, 2003. – 40 с.

Материалы руководства к выполнению лабораторных работ по дисциплине "Численные методы" с применением ЭВМ охватывают разделы: приближение функций, решение систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений, определение собственных значений и векторов, решение задачи Коши и решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, решение вариационных задач методом Ритца. Для каждой работы приведено 20–28 вариантов задания, а также основные формулы и соотношения, необходимые для выполнения работы.

Предназначено для студентов, изучающих дисциплину "Численные методы".

Рецензенты:
член-корр. РАН, д.т.н., профессор У.Г.Пирумов;
Информационно-вычислительный центр космодрома Байконур

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Метод наименьших квадратов

Задание

Дана таблица значений функции $f(x)$ в $(n+1)$ узле: (x_i, f_i), $i=0,\dots, n$.

Требуется, используя метод наименьших квадратов (МНК) на основе ортогональных полиномов:

1. Составить алгоритм и программу для вычисления на основе таблицы (x_i, f_i), $i=0,\dots, n$, значений приближающего полинома m-й степени $P_m(x)$.
2. Использовать программу для решения варианта задания, приняв $n=10$, $m=4$.
3. Сделать выводы.

Варианты заданий

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.	0.12	0.19	0.35	0.4	0.45	0.62	0.71	0.84	0.91	1.0
Вариант	Значения f_i										
1	1.1	1.0	1.4	1.4	2.0	1.3	2	2.1	2.6	2.4	2.8
2	1.9	1.8	2.2	2.1	2.6	2.1	2.7	2.5	2.9	2.7	3.3
3	1.1	1	0.7	0.8	0.3	0.7	0.4	0.6	-0.3	-0.9	-0.9
4	3	2.1	2.3	2.6	2.5	2.7	2.3	1.8	1.8	1.2	1
5	2	2.4	1.6	1.8	1.7	1.8	1.5	1.3	1.5	1.2	1
6	-1	-1	-0.9	-0.5	-0.7	-0.6	-0.3	-0.5	0.4	0.8	1.2
7	0.8	1.	1.4	1.8	1.7	2	3	3.7	4	5.4	6.2
8	1	1	1.5	1.9	2.5	2.6	3.7	4	4.9	6.2	7.5
9	2.1	2	2	2.5	2.4	3.1	3.2	3.8	4	4.6	5.8
10	2.2	2	2.2	3.2	2.6	3.8	4.5	5.2	5.8	7	8
11	2.1	2	2	2.5	2.9	3.1	3.2	2.8	2	1.6	0.8
12	2.2	2	2.2	3.2	2.6	3.8	4.5	3.2	2.8	5	3
13	1	1.2	1.6	2.6	1.8	2.7	3.5	4.4	4.5	5.2	6.3
14	1.2	1	1.3	2.1	1.6	2.6	3.6	4.5	5.5	5.5	7.1
15	0.8	1.2	1.1	1.7	1.4	1.9	2.4	3.1	3.5	4.1	3.9
16	0.8	1	0.8	0.2	0.5	0	-0.5	-1	-1.3	-1.7	-1.8
17	-1	-0.8	-0.9	-0.5	-0.7	-0.6	-0.9	-0.4	-0.3	-0.1	0.1
18	-0.8	-0.8	-0.9	-0.5	-0.7	-1.4	-0.5	-0.1	0.3	0.7	1.2
19	0.8	1.1	1.2	1.8	1.5	2.2	3.1	2.4	4.0	5.6	6.4
20	0.8	1.2	1.3	1.3	2.8	2.7	3.8	4.5	4.9	6.4	7.3
21	1.7	2.2	2.1	2.3	2.7	3	3.6	2.5	4	4.7	5.9
22	2.3	2	3	2.5	2.9	3.1	3.2	1.8	2	1.1	0.9
23	2.5	2	2.1	3.4	2.6	3.8	4.3	4.2	4.8	5	4
24	1	1.2	1.8	2.5	1.9	2.4	3.7	4.2	4.6	5.2	6
25	1.4	1	1.6	2.3	1.9	2.5	3.5	4.2	5.1	5.6	7.3

Вариант	Значения f_i										
26	-1	-0.7	-0.9	-0.5	-0.1	-0.6	-0.9	-0.4	-0.3	-1.1	-2.1
27	-0.9	-0.8	-0.6	-0.5	-0.7	-1.4	-0.5	-0.1	0.7	1.7	2.9
28	2.1	2.1	2.7	2.5	3.2	3.7	3.6	2.1	5.8	7	8.3

Методические указания

Выберем полиномиальную аппроксимацию

$$P_m(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k q_k(x), \qquad (1.1)$$

где полиномы $q_k(t)$ ортогональны на множестве значений $x_0,\dots, x_n$, т.е. для них выполняется условие

$$\sum_{i=0}^{n} q_k(x_i) q_l(x_i) = \begin{cases} 0, & l \neq k; \\ \| q_k \|^2, & l = k. \end{cases} \qquad (1.2)$$

(1.2)

Коэффициенты a_k подбираются так, чтобы минимизировать расстояние S между $f(x)$ и $P_m(x)$ на множестве точек $\{x_i\}$:

$$S(a_0,\dots,a_n)=\sum_{i=0}^{n}\ \sum_{k=0}^{m}(a_k q_k(x_i)-f_i)^2. \qquad (1.3)$$

Используется следующий алгоритм вычисления приближающей функции $P_m(x)$:

1. Вычисляют $q_0 = 1$; $\|q_0\|^2 = n+1$; $a_0=\dfrac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{n+1}$; $\beta_0=\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i$;

$$q_1(x)=(x-\beta_0);\ \ \|q_1\|^2=\sum_{i=0}^{n}(x_i-\beta_0)^2;\ \ a_1=\frac{\sum_{i=0}^{n} f_i(x_i-\beta_0)}{\|q_1\|^2}.$$

2. Для номеров $k = 1,\dots, m$-1 вычисляют:

- коэффициенты

$$\beta_k=\frac{\sum_{i=0}^{n} x_i q_k^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} q_k^2(x_i)};\qquad \gamma_{k-1}=\frac{\sum_{i=0}^{n} x_i q_k(x_i) q_{k-1}(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} q_{k-1}^2(x_i)}; \qquad (1.4)$$

- значения полинома $q_{k+1}(x)$ степени k+1 в заданных точках по формуле

$$q_{k+1}(x) = (x-\beta_k)q_k(x) - \gamma_{k-1}q_{k-1}(x); \tag{1.5}$$

- коэффициенты

$$a_{k+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} f_i q_{k+1}(x_i)}{\| q_{k+1} \|^2} \quad . \tag{1.6}$$

3. Окончательно для 30–40 равноотстоящих точек $x_j=x_0+jh$ вычисляют значения $q(k)$, $k=0,\ldots,m$, затем по формуле (1.1) – значение $P_m(x_j)$ и строят график полинома. На графике также отмечают точки (x_i, f_i), $i=1,\ldots,n$.

2. Оценка погрешности интерполяции для двумерной области

Задание

В области $-1 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$ задана функция $f=f(x,y)$.

Используя интерполяционный полином в форме Лагранжа с равноотстоящими узлами, требуется:

1. Составить алгоритм и программу для вычисления расстояния между функцией $f(x,y)$ и приближающим полиномом m-й степени $P_m(x,y)$.
2. Использовать программу для решения варианта задания, приняв m=2,3,4.
3. Сделать выводы.

Варианты заданий

1. $f(x,y)=\exp((xy)^2)$. **2.** $f(x,y)=\ln[(x+2)(y+3)]$. **3.** $f(x,y)=\sin(xy)^2+x^2$.

4. $f(x,y)=\cos(xy)^2+y^2$. **5.** $f(x,y)=tg\dfrac{(x+y)^2}{4}$. **6.** $f(x,y)=sh\dfrac{(x-y)^2}{4}$.

7. $f(x,y)=ch\dfrac{(x+y)^2}{2}$. **8.** $f(x,y)=ctg\dfrac{x^2+y^2+1}{2}$. **9.** $f(x,y)=\dfrac{e^{x-y}}{x-y+3}$.

10. $f(x,y)=e^{xy}+\sin(xy)$. **11.** $f(x,y)=\dfrac{e^x}{\ln[(x+3)(y+2)]}$. **12.** $f(x,y)=\dfrac{\ln(5-x)}{3-y}$.

13. $f(x,y)=\exp((x-y)^2)$. **14.** $f(x,y)=\ln[(x+2)^2(y+2)]$. **15.** $f(x,y)=y^2+\sin x^2$.

16. $f(x,y)=ctg\dfrac{x^2-y^2+2}{4}$. **17.** $f(x,y)=2x+ch\dfrac{(x-y)^2}{2}$. **18.** $f(x,y)=\dfrac{e^x+x-y}{x-y+3}$.

19. $f(x,y)=(xy)^2-\sin(xy)^2$. **20.** $f(x,y)=\sin(y^2)tg(x^2)$. **21.** $f(x,y)=sh\dfrac{(x+y)^2}{2}$.

22. $f(x,y)=\dfrac{1}{1+e^x+\sin y}$. **23.** $f(x,y)=\dfrac{e^{2x}}{1+\ln(y+2)}$. **24.** $f(x,y)=\dfrac{\ln(4-xy)}{e^{1-xy}}$.

25. $f(x,y)=\dfrac{10^{x-y}}{10(x-y)+21}$. **26.** $f(x,y)=x^2+\ln(y+3)$; **27.** $f(x,y)=(xy)^2e^{x+y}$.

28. $f(x,y)=\sin(xy^2)\cos(x^2y)$.

Методические указания

Интерполяционный полином в форме Лагранжа с равноотстоящими узлами для одномерной области $\xi \in [-1,1]$ имеет вид

$$L_m(\xi)=\sum_{k=0}^{m} N_k(\xi) f_k, \tag{2.1}$$

где f_k – значение функции в k-м узле интерполяции, имеющем координату $\xi_k=-1+kh$ (h – шаг интерполяции); $N_k(\xi)$ – функции формы. Функции $N_k(\xi)$ определяются выбором порядка интерполяции. Так, для m=2 имеем:

$$N_0(\xi)=\frac{\xi}{2}(\xi-1); \quad N_1(\xi)=-(\xi-1)(\xi+1); \quad N_2(\xi)=\frac{\xi}{2}(\xi+1); \tag{2.2}$$

для m=3:

$$\begin{aligned} &N_0(\xi)=-\frac{9}{16}(\xi+\frac{1}{3})(\xi-\frac{1}{3})(\xi-1); \quad N_1(\xi)=\frac{27}{16}(\xi+1)(\xi-\frac{1}{3})(\xi-1);\\ &N_2(\xi)=-\frac{27}{16}(\xi+1)(\xi+\frac{1}{3})(\xi-1); \quad N_3(\xi)=\frac{9}{16}(\xi+1)(\xi+\frac{1}{3})(\xi-\frac{1}{3}); \end{aligned} \tag{2.3}$$

для m=4:

$$\begin{aligned} &N_0(\xi)=\frac{2}{3}(\xi+\frac{1}{2})\xi(\xi-\frac{1}{2})(\xi-1); \quad N_1(\xi)=-\frac{8}{3}(\xi+1)\xi(\xi-\frac{1}{2})(\xi-1);\\ &N_2(\xi)=4(\xi+1)(\xi+\frac{1}{2})(\xi-\frac{1}{2})(\xi-1);\\ &N_3(\xi)=-\frac{8}{3}(\xi+1)(\xi+\frac{1}{2})\xi(\xi-1); \quad N_4(\xi)=\frac{2}{3}(\xi+1)(\xi+\frac{1}{2})\xi(\xi-\frac{1}{2}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть в двумерной области $-1 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$ функция $f(x,y)$ задана таблицей ее значений в узлах:

$$f_{kl}=f(x_k,y_l), \qquad (2.5)$$

где $x_k=-1+kh;\ y_l=-1+lh, \qquad k,\ l=0,\dots,m.$

Интерполяционный полином m-й степени $P_m(x,y)$, построенный на основе таблицы узловых значений функции f_{kl}, записывается в виде

$$P_m(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}N_k(x)N_l(y)f_{kl}. \qquad (2.6)$$

Рассмотрим дискретное множество точек, образующих в области $-1\le x\le 1;\ -1\le y\le 1$ регулярную сетку с шагом $r=2/n$ (в дальнейшем примем n=10). Координаты $(x_i,\ y_j)$ точек определяются по формулам

$$x_i=-1+ir;\ y_j=-1+jr, \qquad i,\ j=0,\dots,n. \qquad (2.7)$$

Расстояние между функцией $f(x,y)$ и интерполяционным полином $P_m(x,y)$, определенное на множестве точек $\{(x_i,\ y_j)\}|_{\ i,\ j\ =\ 0,\dots,n}$, вычисляется по формуле

$$\rho=\rho\big(f(x,y)-P_m(x,y)\big)=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n}\ \sum_{j=0}^{n}\big(P_m(x_i,y_j)-f(x_i,y_j)\big)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.8)$$

Расстояние ρ представляет оценку погрешности интерполяции функции $f(x,y)$ полиномом $P_m(x,y)$. Величина ρ зависит от характера изменения функции $f(x,y)$ в рассматриваемой области, а также от порядка интерполяционного полинома. Так, если $f(x,y)$ представляет полином степени не выше чем $x^m y^m$, то ρ=0.

Используется следующий алгоритм вычисления расстояния ρ:

1. Задаются порядком интерполяции m=2, 3, 4 и вычисляют значения функции $f(x,y)$ в узлах по формуле (2.5).
2. В цикле по $i,\ j=0,\dots,n$ находят:
   - координаты $(x_i,\ y_j)$ точки регулярной сетки по формулам (2.7);
   - значения функций $N_k(x_i)$ и $N_l(y_j)$ для $k,\ l=0,\dots,m$ по формулам (2.2), (2.3) или (2.4);
   - значение полинома $P_m(x,y)$ в точке $(x_i,\ y_j)$ по формуле (2.6);
   - разность $s_{ij}=P_m(x_i,y_j)-f(x_i,y_j)$.
3. Окончательно определяют расстояние

$$\rho=\frac{1}{n+1}\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\ \sum_{j=0}^{n}{s_{ij}}^2}.$$

Вычисления повторяют для m=2, 3, 4 и делают выводы.

Рекомендуется следующая структура программы (на языке Object Pascal).

Для вычисления значений $f(x_i,y_j)$ составляется процедура-функция ft:

```
function ft(x : real; y : real) : real;
```

содержащая аналитическую зависимость $f=f(x,y)$.

Для вычисления значения функций $N_k(x_i)$ и $N_l(y_j)$ составляется процедура fform:

```
procedure fform(m : integer; x : real;  var Nf: arrM);
```

Входными параметрами являются: m – порядок интерполяции, x – значение координаты ξ; результат: Nf – массив значений $N_k(\xi)$. В процедуре fform записываются аналитические выражения (2.2)–(2.4). Тип arrM определяется так:

```
type arrM   = array [0..nm] of real;
```
(принять nm = 10)

Рекомендуется оформить программу, реализующую приведенный выше алгоритм вычисления ρ, в виде отдельной процедуры.

3. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений

Задание

Дана неоднородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \qquad (3.1)$$

где $\mathbf{A}$ – невырожденная квадратная матрица размерности n; $\mathbf{b}$ – вектор-столбец правых частей уравнений; $\mathbf{x}$ – вектор-столбец неизвестных.

Требуется:

1. Составить алгоритм и программу решения СЛАУ размерности n методом Гаусса.
2. Использовать программу для решения варианта задания.
3. Выполнить проверку и сделать выводы.

Варианты заданий

1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,2 & 2,1 & 0,1 & -0,3\\ 0,3 & -0,4 & -1,0 & 0,5\\ -1,0 & 0,3 & 2,0 & -1,4\\ 5,0 & -0,2 & -0,4 & -0,3\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,3\\ 0,2\\ 1,1\\ 0,5\end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2,0 & 0,1 & -3,1 & -0,2\\ 1,1 & -2,0 & 2,8 & 0,1\\ 0,2 & 1,2 & -2,1 & -0,2\\ 0,3 & -0,2 & 0,3 & 2,0\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,4\\ 0,2\\ 0,3\\ 0,6\end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,2 & -0,2 & -0,2 & 0,2\\ 1,0 & -2,0 & -0,1 & 0,8\\ 0,4 & 0,4 & 0,5 & 0,9\\ 0,1 & 0,2 & -0,1 & -0,3\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,2\\ 0,1\\ 0,7\\ 1,1\end{bmatrix}$.

4. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0,6 & 1,1 & -0,7 & 0,2\\ 0,1 & -1,2 & 0,2 & 0,7\\ 0,3 & -1,4 & -0,3 & -0,5\\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & -0,1\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1,2\\ 0,1\\ 0,2\\ 1,1\end{bmatrix}$.

5. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,1 & -0,2 & 0,1 & -0,2\\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,8\\ 0,3 & 3,5 & -0,1 & 0,3\\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1,0\\ 0,2\\ 1,1\\ 2,2\end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,1 & 0,6 & -0,3 & 0,3\\ 0,2 & -0,4 & 0,4 & 0,2\\ 0,1 & 0,6 & -0,2 & 0,4\\ 0,5 & -0,2 & 0,2 & 0,6\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,2\\ 0,5\\ 1,0\\ 0,8\end{bmatrix}$.

7. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2,2 & -3,2 & 1,2 & -0,9\\ 1,5 & 2,1 & -0,5 & 1,4\\ 0,9 & -1,4 & 0,6 & 0,3\\ 0,5 & 1,2 & -0,6 & -0,9\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,4\\ 1,5\\ -0,2\\ 0,4\end{bmatrix}$.

8. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,7 & 0,7 & -0,8 & 0,4\\ 0,6 & -0,8 & 1,4 & -0,6\\ 0,8 & 0,8 & 1,8 & 0,9\\ 1,3 & -0,5 & -0,7 & 1,2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2,2\\ 1,7\\ -0,5\\ 0,7\end{bmatrix}$.

9. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,4 & 0,3 & -0,4 & 0,9\\ 0,6 & -0,4 & 1,3 & -0,6\\ 0,8 & -2,2 & -0,5 & 0,5\\ 0,3 & 1,4 & 0,6 & -1,3\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1,3\\ -0,4\\ 0,6\\ 0,9\end{bmatrix}$.

10. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,7 & 1,2 & -0,4 & -1,4\\ 1,1 & -0,8 & 1,3 & 0,7\\ 1,6 & 0,7 & 1,4 & -0,9\\ 0,8 & 1,2 & -0,8 & 0,4\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,6\\ -0,7\\ 1,2\\ 0,9\end{bmatrix}$.

11. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,3 & -0,8 & -0,5 & 0,6\\ 0,8 & 0,4 & -0,6 & 0,8\\ 0,6 & -0,4 & 1,2 & -0,6\\ 0,4 & 0,7 & -1,4 & -1,1\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,7\\ 1,2\\ 0,9\\ -0,9\end{bmatrix}$.

12. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,1 & -0,2 & 0,7 & -0,3\\ 0,8 & 0,2 & -1,1 & 0,2\\ 0,3 & -0,3 & 1,0 & 0,4\\ 0,2 & 0,2 & -0,9 & 0,5\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,3\\ 1,0\\ 0,2\\ 0,1\end{bmatrix}$.

13. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,6 & 1,0 & 0,7 & 0,3\\ 1,2 & 0,2 & -0,6 & 0,7\\ 2,7 & -0,8 & 1,2 & -2,4\\ 3,6 & 0,2 & -3,5 & -1,2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2,1\\ 0,2\\ 1,3\\ 0,1\end{bmatrix}$.

14. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3,5 & 0,2 & 3,8 & -0,3\\ 4,5 & 2,1 & -0,1 & -0,1\\ -2,1 & 3,2 & 0,1 & -0,2\\ 3,2 & 1,8 & -3,2 & 0,2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,8\\ 1,1\\ 0,2\\ 0,2\end{bmatrix}$.

15. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,2 & 0,7 & -0,2 & 0,2\\ 0,8 & 0,2 & 0,1 & 1,0\\ -0,3 & 0,1 & 3,0 & 2,0\\ 0,1 & 1,1 & 1,1 & -1,3\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,1\\ 2,0\\ 0,1\\ 0,1\end{bmatrix}$.

16. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1,6 & 0,1 & -2,0 & -0,1\\ 0,8 & 0,2 & -0,2 & -0,7\\ 0,3 & -0,2 & 0,4 & 0,5\\ 1,0 & 3,1 & -0,2 & -1,1\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,2\\ 0,1\\ 0,2\\ -0,1\end{bmatrix}$.

17. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3,1 & -0,1 & 1,0 & -0,2\\ -1,8 & 1,2 & 0,1 & -0,8\\ 0,2 & -2,1 & 0,7 & -1,7\\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,3\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1,0\\ 0,1\\ 1,1\\ 0,2\end{bmatrix}$.

18. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,2 & 0,6 & -0,8 & 0,9\\ 0,8 & -0,5 & 0,4 & -0,3\\ 0,2 & 1,2 & -0,3 & 1,4\\ 0,7 & -0,8 & 1,2 & -0,7\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2,2\\ 0,6\\ -0,6\\ 0,9\end{bmatrix}$.

19. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2,0 & -3,1 & 1,2 & -0,9\\ 1,5 & 2,6 & -0,5 & 1,4\\ 0,9 & -1,4 & 0,7 & 0,3\\ 0,4 & 1,2 & -0,6 & -0,9\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,2\\ 1,5\\ -0,2\\ 0,4\end{bmatrix}$.

20. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,8 & 0,5 & -0,8 & 0,4\\ 0,6 & -0,8 & 1,4 & -0,6\\ 0,9 & 0,8 & 1,8 & 0,9\\ 1,3 & -0,5 & -0,7 & 1,2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2,0\\ 1,7\\ -0,8\\ 0,7\end{bmatrix}$.

21. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,8 & 0,3 & -0,4 & 0,9\\ 0,4 & -0,4 & 1,5 & -0,6\\ 0,8 & -2,2 & -0,5 & 0,5\\ 0,3 & 1,4 & 0,6 & -1,3\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1,6\\ -0,2\\ 0,6\\ 0,9\end{bmatrix}$.

22. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,7 & 1,2 & -0,4 & -1,6\\ 1,5 & -0,8 & 1,3 & 0,7\\ 1,6 & 0,7 & 1,7 & -0,9\\ 0,8 & 1,2 & -0,8 & 0,6\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,7\\ -0,9\\ 1,2\\ 1,9\end{bmatrix}$.

23. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,5 & -0,8 & -0,5 & 0,6\\ 0,8 & 1,4 & -0,6 & 1,8\\ 0,6 & -0,4 & 1,2 & -0,6\\ 0,5 & 0,7 & -1,4 & -1,1\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,9\\ 1,2\\ 1,9\\ -0,8\end{bmatrix}$.

24. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0,3 & -0,2 & 1,7 & -0,3\\ 0,8 & 0,2 & -1,1 & 0,2\\ 0,6 & -0,3 & 1,2 & 0,4\\ 0,2 & 0,2 & -0,9 & 0,5\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,5\\ 1,0\\ 2,2\\ 0,1\end{bmatrix}$.

25. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,6 & 1,0 & 0,4 & 0,3\\ 1,2 & 0,2 & -0,6 & 0,7\\ 2,7 & -0,8 & 2,2 & -2,4\\ 1,7 & 0,2 & -3,5 & -1,2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1,1\\ 0,2\\ 0,3\\ 0,1\end{bmatrix}$.

26. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2,5 & 0,2 & 1,9 & -0,3\\ 4,5 & 2,1 & -0,1 & -0,1\\ -2,1 & 3,2 & 0,3 & 0,2\\ 1,2 & 1,8 & -3,2 & 0,2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0,8\\ -1,1\\ 0,2\\ 0,5\end{bmatrix}$.

27. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2,5 & -3,2 & 1,2 & -0,9\\ 1,5 & 2,1 & -0,5 & 1,4\\ 0,9 & -1,4 & 0,8 & 0,3\\ -0,3 & 1,2 & -0,6 & -1,9\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-0,7\\ 1,8\\ 0,9\\ 0,4\end{bmatrix}$.

28. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1,7 & 0,6 & -0,4 & 0,4\\ 1,1 & -0,8 & 1,4 & -0,6\\ 0,8 & 0,8 & 1,9 & 0,9\\ 1,3 & -0,5 & -0,7 & 1,6\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2,5\\ -1,7\\ 0,7\\ 0,7\end{bmatrix}$.

Методические указания

При численном решении задачи (3.1) необходимо, чтобы матрица **A** была достаточно хорошо обусловлена.

Решение проводится в три этапа:

1. Факторизация матрицы **A**, т.е. представление ее в виде **A=LU,** где **L** и **U** – соответственно левая и правая треугольные матрицы, причем главная диагональ матрицы **U** состоит из единиц:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \\ \dots & & L_{ii} & \\ L_{n1} & \dots & & L_{nn}\end{bmatrix};\quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & U_{12} & \dots & U_{1n}\\ & 1 & & \dots\\ & & 1 & U_{n-1,n}\\ & & & 1\end{bmatrix}.$$

2. Решение системы **Ly = b** и определение вектора **y** (прямой ход).

3. Решение системы **Ux = y** и определение искомого вектора **x** (обратный ход).

Эти этапы решения реализуются следующим образом.

1. Организуют цикл по i=1,...,n и вложенный цикл по j=1,...n. В цикле вычисляют элементы матриц **L** и **U**:

$$L_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}, \quad \text{если } i \ge j;$$

$$U_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}}{L_{ii}}, \quad \text{если } i < j. \tag{3.2}$$

В процессе вычисления диагональных элементов L_{ii} производят их проверку:

если | L_{ii} |<ε, где ε – малая величина, то расчет заканчивается, так как матрица **A** является плохо обусловленной (принять ε=10^{-10}).

Определитель матрицы **A** может быть вычислен как произведение диагональных элементов L_{ii} :

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} L_{ii}. \tag{3.3}$$

2. Элементы вектора **y** вычисляются как

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}\, y_k}{L_{ii}} \quad \text{для } i = 1,...,n. \tag{3.4}$$

3. Элементы вектора **x** вычисляются как

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} U_{ik}\, x_k \quad \text{для } i = n,...,1. \tag{3.5}$$

По окончании расчетов производится проверка: норма ||**r**|| вектора невязки **r =Ax - b** должна быть близка к нулю.

Рекомендуется оформить программу, реализующую метод, в виде процедуры. Заголовок процедуры на языке Pascal

```
procedure gauss(n : byte;  A : matrM;  b : arrM;  var x : arrM);
```

Входные параметры: n – размерность системы уравнений; A – матрица системы (3.1); b – вектор правых частей системы (3.1). Результат x – массив значений x_i;

```
type arrM   = array [1..m] of real;
     matrN = array [1..m] of array [1..m] of real.
```

Принять константу m=10.

4. Метод Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений

Задание

Дана неоднородная СЛАУ вида

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{4.1}$$

где **A** – невырожденная квадратная матрица размерности n; **b** – вектор-столбец правых частей уравнений; **x** – вектор-столбец неизвестных.

Требуется:

1. Составить алгоритм и программу решения СЛАУ размерности n методом Зейделя.
2. Использовать программу для решения варианта задания.
3. Сделать выводы.

Варианты заданий

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{,}3 & 1{,}0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 1{,}2 & 2{,}6 & -0{,}6 & 0{,}7 \\ 2{,}7 & -0{,}8 & 6{,}2 & -2{,}4 \\ 3{,}6 & 0{,}2 & -3{,}5 & -7{,}5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}2 \\ 1{,}3 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4{,}5 & 0{,}2 & 3{,}8 & -0{,}3 \\ 4{,}5 & 5{,}1 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -2{,}1 & 3{,}2 & 5{,}8 & -0{,}2 \\ 3{,}2 & 1{,}8 & -3{,}2 & 7{,}8 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 1{,}1 & 0{,}1 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -2{,}4 & -1{,}0 & 0{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & 2{,}0 & -1{,}4 \\ 5{,}0 & -0{,}2 & -0{,}4 & -0{,}3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 1{,}1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{,}0 & 0{,}1 & -1{,}1 & -0{,}3 \\ 1{,}0 & -2{,}0 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1{,}2 & -2{,}7 & -0{,}2 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 0{,}3 & 3{,}1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 0{,}7 & -0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 2{,}2 & 0{,}1 & 1{,}0 \\ -0{,}3 & 0{,}1 & 3{,}0 & 2{,}0 \\ 0{,}1 & 1{,}1 & 1{,}1 & -2{,}5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 2{,}0 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{,}6 & 0{,}1 & -2{,}0 & -0{,}1 \\ 0{,}8 & 1{,}9 & -0{,}2 & -0{,}7 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 1{,}4 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 3{,}1 & -0{,}2 & -4{,}6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ -0{,}1 \end{bmatrix}$.

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3{,}1 & -0{,}1 & 1{,}0 & -0{,}2 \\ -1{,}8 & 3{,}2 & 0{,}1 & -0{,}8 \\ 0{,}2 & -2{,}1 & 4{,}7 & -1{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1{,}3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 0{,}1 \\ 1{,}1 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$.

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{,}7 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & -1{,}5 & 0{,}4 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 1{,}2 & -3{,}3 & 1{,}4 \\ 0{,}7 & -0{,}8 & 1{,}2 & -2{,}9 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2{,}2 \\ 0{,}6 \\ -0{,}6 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$.

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5{,}7 & -3{,}2 & 1{,}2 & -0{,}9 \\ 1{,}5 & 3{,}8 & -0{,}5 & 1{,}4 \\ 0{,}9 & -1{,}4 & 2{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & -0{,}6 & -2{,}8 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 1{,}5 \\ -0{,}2 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$.

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 0{,}7 & -0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & -2{,}8 & 1{,}4 & -0{,}6 \\ 0{,}8 & 0;8 & 2{,}8 & 0{,}9 \\ 1{,}3 & -0{,}5 & -0{,}7 & 2{,}9 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2{,}2 \\ 1{,}7 \\ -0{,}5 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}$.

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,9 & 0,3 & -0,4 & 0,9 \\ 0,6 & -2,7 & 1,3 & -0,6 \\ 0,8 & -2,2 & -3,8 & 0,5 \\ 0,3 & 1,4 & 0,6 & -2,6 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ -0,4 \\ 0,6 \\ 0,9 \end{bmatrix}.$ **12.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,7 & 1,2 & -0,4 & -1,4 \\ 1,1 & -3,6 & 1,3 & 0,7 \\ 1,6 & 0,7 & 3,4 & -0,9 \\ 0,8 & 1,2 & -0,8 & 3,4 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ -0,7 \\ 1,2 \\ 0,9 \end{bmatrix}.$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,3 & -0,2 & -0,2 & 0,2 \\ 1,0 & -2,1 & -0,1 & 0,8 \\ 0,4 & 0,4 & 3,5 & 0,9 \\ 0,1 & 0,2 & -0,1 & -1,3 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,7 \\ 1,1 \end{bmatrix}.$ **14.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3,6 & 1,1 & -0,7 & 0,2 \\ 0,1 & -1,2 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & -0,4 & -2,3 & -0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & -1,1 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ 1,1 \end{bmatrix}.$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,1 & -0,2 & 0,1 & -0,2 \\ 0,2 & 1,9 & 0,4 & 0,8 \\ 0,3 & 0,5 & -1,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 1,4 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,2 \\ 1,1 \\ 2,2 \end{bmatrix}.$ **16.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,1 & 0,6 & -0,3 & 0,3 \\ 0,2 & -1,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & -2,2 & 0,4 \\ 0,5 & -0,2 & 0,2 & 1,6 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 1,0 \\ 0,8 \end{bmatrix}.$

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,7 & -0,2 & 1,2 & -0,9 \\ 1,5 & 3,1 & -0,5 & 0,4 \\ 0,9 & -0,4 & 2,1 & 0,3 \\ 0,5 & 1,2 & -0,6 & -3,9 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,5 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{bmatrix}.$ **18.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,7 & 0,7 & -0,8 & 0,4 \\ 0,6 & -3,8 & 1,4 & -0,6 \\ 0,8 & 0,8 & 1,8 & 0,1 \\ 1,3 & -0,5 & -0,1 & 2,2 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2,2 \\ 1,7 \\ -0,5 \\ 0,7 \end{bmatrix}.$

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,4 & 0,3 & -0,4 & 0,5 \\ 0,6 & -2,4 & 1,3 & -0,1 \\ 0,8 & -0,2 & -2,1 & 0,5 \\ 0,3 & -0,4 & 0,6 & -1,5 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,4 \\ 0,6 \\ 0,9 \end{bmatrix}.$ **20.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,7 & 1,2 & -0,4 & 0,4 \\ 0,1 & -2,8 & 1,3 & 0,7 \\ -0,6 & 0,7 & 2,4 & -0,9 \\ 0,8 & -0,2 & -0,8 & 2,4 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ -0,7 \\ 1,2 \\ -0,9 \end{bmatrix}.$

21. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,3 & -0,8 & -0,5 & 0,6 \\ 0,8 & 2,4 & -0,6 & 0,8 \\ 0,6 & -0,4 & 2,2 & -0,6 \\ 0,4 & 0,5 & -1,0 & -2,1 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 1,2 \\ 0,9 \\ -0,9 \end{bmatrix}.$ **22.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,1 & -0,2 & 0,7 & -0,3 \\ 0,8 & 2,2 & -1,1 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 & 1,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & -0,9 & 2,5 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 1,0 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,6 & 1,0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 2,2 & -0,6 & 0,7 \\ -0,7 & -0,8 & 2,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & -0,5 & -2,2 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2,1 \\ 0,2 \\ 1,3 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$ **24.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,5 & 0,2 & 0,8 & -0,3 \\ 1,5 & 2,1 & -0,1 & -0,1 \\ -2,1 & 0,2 & 2,7 & -0,2 \\ 0,2 & 1,8 & -0,4 & 2,7 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 1,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$

25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,8 & 0,7 & -0,2 & 0,2 \\ 0,8 & 2,2 & 0,1 & 1,0 \\ -0,3 & 0,1 & 3,0 & 2,0 \\ 0,1 & 0,3 & 1,1 & -1,9 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 2,0 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$ **26.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1,6 & 0,1 & -1,0 & -0,1 \\ 0,8 & 2,2 & -0,2 & -0,7 \\ 0,3 & -0,2 & 1,4 & 0,5 \\ 1,0 & 1,1 & -0,2 & -2,6 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,2 \\ -0,1 \end{bmatrix}.$

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,9 & -0,3 & 1,1 & -0,9 \\ 1,3 & 3,1 & -0,5 & 0,4 \\ 0,9 & -0,2 & 2,5 & 0,3 \\ 0,4 & 1,2 & -0,5 & -3,9 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 1,8 \\ -1 \\ 0,6 \end{bmatrix}.$ **28.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,8 & 0,6 & -0,7 & 0,4 \\ 0,4 & -3,8 & 1,4 & -0,5 \\ 0,8 & 0,8 & 1,9 & 0,1 \\ 1,3 & -0,5 & 0,1 & 2,2 \end{bmatrix} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 1,4 \\ -0,5 \\ 0,3 \end{bmatrix}.$

Методические указания

1. В предположении, что все диагональные элементы a_{ii} матрицы **A** отличны от нуля, система (4.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(\qquad\quad -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n) + \frac{b_1}{a_{11}}; \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 \qquad\quad - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n) + \frac{b_2}{a_{22}}; \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{2,n-1}x_{n-1} \qquad) + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} \end{aligned} \tag{4.2}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}, \tag{4.3}$$

где элементы матрицы **C** и столбца **d** определяются следующим образом:

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ для } i \neq j; \qquad c_{ii} = 0; \qquad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

2. Проверяются условия сходимости метода. Достаточные условия имеют вид

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \alpha < 1, \ \ i = 1,\ldots,n.$$

3. Выбираются начальные приближения для x_i, например $x_i = b_i$, $i = 1,\ldots,n$.
4. На основе уравнений (4.2) строится итерационный процесс вычисления приближений вектора неизвестных. В соответствии с методом Зейделя при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестного $x_i^{(k+1)}$ при $i>1$ используются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$, а также k-е приближения неизвестных $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$. При этом используется формула

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}, \qquad i = 1,\ldots n. \tag{4.4}$$

Итерации продолжают до выполнения условия $\left\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right\| < \varepsilon$, где ε – заданная малая погрешность вычислений (принять $\varepsilon = 10^{-6}$).

Рекомендуется оформить программу, реализующую метод, в виде процедуры, заголовок которой аналогичен заголовку процедуры gauss (см. разд. 3).

5. Метод итераций определения собственных значений и векторов симметричной матрицы

Задание

Дана квадратная симметричная матрица **A** размерности n. Требуется:

1. Составить алгоритм и программу для определения двух наибольших по модулю собственных значений и соответствующих векторов матрицы **A** с использованием метода итераций с векторами.
2. Использовать программу для решения варианта задания.
3. Выполнить проверку и сделать выводы.

Варианты заданий

$$\mathbf{1.A} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1{,}1 & 2 & 1 \\ 1{,}1 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 2 & 0{,}5 & 2 & 1{,}2 \\ 1 & 2 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{2.A} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0{,}5 & 1{,}8 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}8 & 2 \\ 1{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 2 & 0{,}5 & 1{,}2 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{3.A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 2 & 1 \\ 1{,}2 & 2 & 0{,}6 & 1{,}2 \\ 2 & 0{,}6 & 1 & 0{,}7 \\ 1 & 1{,}2 & 0{,}7 & 1{,}8 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{4.A} = \begin{bmatrix} 2{,}8 & 1{,}5 & 2{,}1 & 1{,}9 \\ 1{,}5 & 3 & 1{,}5 & 1{,}3 \\ 2{,}1 & 1{,}5 & 3{,}6 & 1{,}7 \\ 1{,}9 & 1{,}3 & 1{,}7 & 3{,}8 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{5.A} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & 1{,}2 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 2{,}1 & 0{,}5 & 2 \\ 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & 1{,}4 \\ 0{,}5 & 2 & 1{,}4 & 1{,}7 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{6.A} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & -1 & 1 \\ 0{,}2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1{,}2 & 1{,}2 \\ 1 & 0 & 1{,}2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{7.A} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}7 & 3 \\ 1{,}5 & -2 & 1 & 1{,}6 \\ 0{,}7 & 1 & 2 & 1{,}9 \\ 3 & 1{,}6 & 1{,}9 & 2{,}5 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{8.A} = \begin{bmatrix} 1{,}8 & 1{,}5 & 1{,}3 & 1{,}8 \\ 1{,}5 & 2{,}6 & 1{,}5 & 1{,}6 \\ 1{,}3 & 1{,}5 & 2{,}9 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}6 & 1{,}4 & 4{,}1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{9.A} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 1{,}5 & 2 & 1{,}8 \\ 1{,}5 & 2{,}5 & 1{,}7 & 1{,}3 \\ 2 & 1{,}7 & 3{,}1 & 1 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{10.A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 1 & 3{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}6 & 1{,}5 & 0{,}6 \\ 1 & 1{,}5 & -1 & 1 \\ 3{,}5 & 0{,}6 & 1 & 3{,}2 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{11.A} = \begin{bmatrix} 1{,}7 & 1{,}5 & 1{,}2 & 2 \\ 1{,}5 & -1 & 2{,}6 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 2{,}6 & 3 & 1{,}4 \\ 2 & 1{,}2 & 1{,}4 & 4 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{12.A} = \begin{bmatrix} 3 & 1{,}6 & 1{,}5 & 3{,}5 \\ 1{,}6 & 2 & 1{,}7 & 1{,}3 \\ 1{,}5 & 1{,}7 & 4 & 1{,}4 \\ 3{,}5 & 1{,}3 & 1{,}4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{13.A} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & 2{,}5 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 1 & 2 & 1{,}6 \\ 2{,}5 & 2 & 1 & 1{,}7 \\ 3{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{14.A} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}2 & 2 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 1 & 0{,}4 & 1{,}2 \\ 2 & 0{,}4 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & 1{,}5 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{15.A} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}2 & 2 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 2 & 0{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{16.A} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & 1{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & -1 & 0 \\ 2 & 1{,}1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{17.A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1{,}4 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1{,}5 & 1 \\ 1{,}4 & 1{,}5 & 2 & 1{,}2 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{18.A} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}2 & -1 & 1 \\ 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1{,}5 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 0{,}2 & 1{,}5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{19.A} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}2 & 3{,}5 & 4{,}5 \\ 1{,}2 & 2 & 2 & 1{,}6 \\ 3{,}5 & 2 & 0 & 1{,}7 \\ 4{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 2 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{20.A} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 1{,}2 & -1 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 0 \\ 1{,}2 & 0{,}5 & 0 & 1{,}4 \\ -1 & 0 & 1{,}4 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{21.A} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}8 & 2 \\ 2 & 0{,}8 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{22.A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 1 & 0{,}9 \\ 1{,}2 & 2 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 1 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & 1 & 2{,}2 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{23.A} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}6 & 2 \\ 2 & 0{,}6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{24.A} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 1{,}5 & 3 & 2 & 1{,}6 \\ 4{,}5 & 2 & 3{,}5 & 1{,}7 \\ 5{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{25.A} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1{,}4 & 2 & 1{,}2 \\ 1{,}4 & 1 & 0 & 1{,}7 \\ 2 & 0 & 2{,}5 & 2{,}1 \\ 1{,}2 & 1{,}7 & 2{,}1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{26.A} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 1{,}4 & 0{,}3 & 1 \\ 1{,}4 & 2 & 1 & 1{,}7 \\ 0{,}3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1{,}7 & 1 & 2{,}8 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{27.A} = \begin{bmatrix} 1{,}7 & 1{,}5 & 2 & -1 \\ 1{,}5 & 3 & 0{,}8 & 2{,}3 \\ 2 & 0{,}8 & 4 & 1{,}1 \\ -1 & 2{,}3 & 1{,}1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{28.A} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}7 & 1{,}5 & 5{,}1 \\ 1{,}7 & 2 & 2{,}1 & 2{,}6 \\ 1{,}5 & 2{,}1 & 1 & 1{,}5 \\ 5{,}1 & 2{,}6 & 1{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}.$$

Методические указания

Собственные векторы $\mathbf{x}_i$ и собственные значения λ_i матрицы **A** удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{5.1}$$

Собственный вектор $\mathbf{x}_1$, соответствующий наибольшему по модулю собственному значению λ_1 матрицы **A**, вычисляют с использованием итераций с векторами.

Назначают начальное приближение, например $\mathbf{z}^{(0)} = [1, 1, 1,\ldots, 1]^{\mathrm{T}}$.

Далее на k-й итерации определяют:

- приближение к собственному вектору $\mathbf{y}^{(k)}=[y_1,\ldots, y_n]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}\,\mathbf{z}^{(k-1)}; \tag{5.2}$$

- приближение к собственному значению λ_1:

$$\lambda_1^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)\,\mathrm{T}}\,\mathbf{z}^{(k-1)}; \tag{5.3}$$

- норму вектора $\mathbf{y}^{(k)}$:

$$\| \mathbf{y}^{(k)} \| = (\mathbf{y}^{(k)\,\mathrm{T}}\, \mathbf{y}^{(k)})^{1/2}\,; \tag{5.4}$$

- нормированное приближение к собственному вектору $\mathbf{z}^{(k)} = [z_1, \ldots, z_n]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{z}^{(k)} = \frac{\mathbf{y}^{(k)}}{\left\| \mathbf{y}^{(k)} \right\|}. \tag{5.5}$$

При этом используются следующие выражения:

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, z_j^{(k-1)}, \quad i = 1,\ldots,n;$$

$$\lambda_1^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(k)}\, z_i^{(k-1)}; \tag{5.6}$$

$$\| \mathbf{y}^{(k)} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i^{(k)}}^2}\,;$$

$$z_i^{(k)} = \frac{y_i^{(k)}}{\left\| \mathbf{y}^{(k)} \right\|}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Итерации продолжаются, пока не выполнится условие

$$\left\| \mathbf{y}^{(k)} - \lambda_1^{(k)}\, \mathbf{z}^{(k-1)} \right\| < \varepsilon, \tag{5.7}$$

где ε – заданная малая погрешность вычислений (принять $\varepsilon = 10^{-6}$). Окончательно принимается $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k)}$; $\mathbf{x}_1 \approx \mathbf{z}^{(k)}$.

Далее аналогично вычисляют собственный вектор $\mathbf{x}_2$, соответствующий второму по величине модуля собственному значению λ_2. Здесь, однако, в процессе итераций с векторами требуется выделять ортогональную к $\mathbf{x}_1$ составляющую приближения к собственному вектору $\mathbf{x}_2$. Алгоритм вычислений включает следующие действия.

Назначают начальное приближение, например $\mathbf{z}^{(0)} = [1, 1, 1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$.

Далее на k-й итерации определяют:

- приближение к собственному вектору $\mathbf{v}^{(k)} = [v_1, \ldots, v_n]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{A}\, \mathbf{z}^{(k-1)};$$

- приближение к собственному значению $\lambda_2^{(k)}$:

$$\lambda_2^{(k)} = \mathbf{v}^{(k)\,\mathrm{T}}\, \mathbf{z}^{(k-1)};$$

- проекцию $\mathbf{v}^{(k)}$ на $\mathbf{x}_1$:

$$\rho = \mathbf{v}^{(k)\,\mathrm{T}}\, \mathbf{x}_1;$$

- ортогональное к $\mathbf{x}_1$ приближение к собственному вектору $\mathbf{y}^{(k)}$:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k)} - \rho \mathbf{x}_1;$$

- норму $\|\mathbf{y}^{(k)}\|$ и нормированное приближение к собственному вектору $\mathbf{z}^{(k)}$ по формулам (5.4), (5.5).

Итерации продолжаются до выполнения условия

$$\left\| \mathbf{v}^{(k)} - \lambda_2^{(k)}\, \mathbf{z}^{(k-1)} \right\| < \varepsilon. \tag{5.8}$$

Окончательно принимается $\lambda_2 \approx \lambda_2^{(k)}$; $\mathbf{x}_2 \approx \mathbf{z}^{(k)}$.

6. Метод вращений определения собственных значений и векторов пары симметричных матриц

Задание

Дана пара симметричных матриц **K** и **M** размерности n. Требуется:

1. Составить алгоритм и программу для определения всех собственных значений и собственных векторов пары матриц **K** и **M** с использованием метода вращений (обобщенного метода Якоби).
2. Использовать программу для решения варианта задания.
3. Выполнить проверку и сделать выводы.

Варианты заданий

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 50+3i & 10-i & 3 & 4 & -30-i \\ 10-i & 20+2i & 10-i & 3 & 4 \\ 3 & 10-i & 90-i & 10-i & 3 \\ 4 & 3 & 10-i & 20+2i & 10-i \\ -30-i & 4 & 3 & 10-i & 50+3i \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 60-i & 5+i & 3 & 1 & 10 \\ 5+i & 10+2i & 5-i & 3 & 1 \\ 3 & 5-i & 30+i & 5-i & 3 \\ 1 & 3 & 5-i & 10+2i & 5+i \\ 10 & 1 & 3 & 5+i & 60-i \end{bmatrix}, \quad i - \text{номер варианта}.$$

Методические указания

Собственные векторы $\mathbf{x}_i$ и собственные значения λ_i пары матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ удовлетворяют уравнению

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \qquad (6.1)$$

Задача определения λ_i и $\mathbf{x}_i$, $i=1,\ldots,n$, называется обобщенной проблемой собственных значений. В методе вращений решения этой задачи матрицы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ одновременно приводят к диагональному виду с помощью матриц вращения по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{s+1} &= \mathbf{P}_s^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_s\mathbf{P}_s; \\ \mathbf{M}_{s+1} &= \mathbf{P}_s^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_s\mathbf{P}_s, \end{aligned} \qquad (6.2)$$

где $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$; $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$, а несимметричная матрица вращения на s-м шаге $\mathbf{P}_s$ имеет вид

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \alpha & \\ & & 1 & & \\ & \gamma & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \qquad (6.3)$$

У матрицы $\mathbf{P}_s$ все диагональные элементы равны единице, а из внедиагональных – отличны от нуля только два элемента: $P_{ij} = \gamma$ и $P_{ji} = \alpha$. Значения γ и α выбирают так, чтобы после преобразования (6.2) элементы $k_{ij}^{(s+1)}$ и $m_{ij}^{(s+1)}$ матриц $\mathbf{K}_{s+1}$ и $\mathbf{M}_{s+1}$ равнялись нулю. Вычисление элементов γ и α производится с помощью следующего алгоритма:

$$\begin{aligned} a_i &= k_{ii}^{(s)}m_{ij}^{(s)} - m_{ii}^{(s)}k_{ij}^{(s)}; \\ a_j &= k_{jj}^{(s)}m_{ij}^{(s)} - m_{jj}^{(s)}k_{ij}^{(s)}; \\ a &= k_{ii}^{(s)}m_{jj}^{(s)} - m_{ii}^{(s)}k_{jj}^{(s)}; \\ z &= \frac{a}{2} + sign(a)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a_i a_j}; \\ \gamma &= -\frac{a_i}{z}; \qquad \alpha = \frac{a_j}{z}. \end{aligned} \qquad (6.4)$$

Номера i, j выбирают так, чтобы аннулировать наибольшие по модулю внедиагональные элементы $k_{ij}^{(s)}$ и $m_{ij}^{(s)}$. В простейшем случае на итерации с номером t допустимо организовать двойной цикл по $i=2,\ldots,n$ и $j=1,\ldots,i$-1 с тем,

чтобы аннулировать поочередно внедиагональные элементы $k_{ij}^{(s)}$ и $m_{ij}^{(s)}$. На новой, $(t+1)$-й итерации цикл повторяют.

С увеличением количества вращений по формулам (6.2)-(6.4) матрицы $\mathbf{K}_{s+1}$ и $\mathbf{M}_{s+1}$ приобретают диагональный вид. Тогда приближение к i-у собственному значению после s-го вращения определяют по формуле

$$\lambda_i^{(s+1)} = \frac{k_{ii}^{(s+1)}}{m_{ii}^{(s+1)}}, \quad i = 1,\ldots,n. \qquad (6.5)$$

Оценка сходимости процесса производится на основе сравнений вычисленных приближений $\lambda_i^{(s+1)}$ и $\lambda_i^{(s)}$, а также проверки малости всех внедиагональных элементов матриц $\mathbf{K}_{s+1}$ и $\mathbf{M}_{s+1}$.

В простейшем случае вращения продолжают, пока по окончании итерации с номером $(t+1)$ не выполнится условие

$$\left|\lambda_i^{(t+1)} - \lambda_i^{(t)}\right| < \varepsilon, \; i = 1,\ldots,n, \qquad (6.6)$$

где ε - заданная малая погрешность вычислений (принять $\varepsilon=10^{-5}$).

Окончательно принимается $\lambda_i = \lambda_i^{(r+1)}$, где r - номер последнего вращения, а матрица $\mathbf{X}=[\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n]$, состоящая из собственных векторов, представляется в виде произведения

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_r. \qquad (6.7)$$

7. Метод итераций решения систем нелинейных уравнений

Задание

Дана система нелинейных уравнений вида

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0; \\ &f_2(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0; \\ &\ldots\ldots \\ &f_n(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0, \end{aligned} \qquad (7.1)$$

где f_i – заданные функции; x_i – неизвестные.

Требуется:

1. Составить алгоритм и программу решения систем нелинейных уравнений размерности n методом итераций.
2. Для варианта задания привести систему уравнений 2-го порядка к виду

$$x_1 = \varphi_1(x_1, x_2);$$
$$x_2 = \varphi_2(x_1, x_2). \qquad (7.2)$$

3. Графически найти область, содержащую решение системы: $x_1^* \le x_1 \le x_1^{**}$; $x_2^* \le x_2 \le x_2^{**}$, и определить начальные приближения $x_i^{(0)}$, $i=1,2$.
4. Использовать разработанную программу для уточнения корней с заданной точностью.
5. Сделать выводы.

Варианты заданий

1. $\begin{cases}\sin(x_1+1)-x_2=1{,}2;\\ 2x_1+\cos x_2=2.\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}\cos(x_1-1)+x_2=0{,}5;\\ x_1-\cos x_2=3.\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}\sin x_1+2x_2=2;\\ \cos(x_2-1)+x_1=0{,}7.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\cos x_1+x_2=1{,}5;\\ 2x_1-\sin(x_2-0{,}5)=1.\end{cases}$ **5.** $\begin{cases}\sin(x_1+0{,}5)-x_2=1;\\ \cos(x_2-2)+x_1=0.\end{cases}$ **6.** $\begin{cases}\cos(x_1+0{,}5)+x_2=0{,}8;\\ \sin x_2-2x_1=1{,}6.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\sin(x_1-1)+x_2=1{,}3;\\ x_1-\sin(x_2+1)=0{,}8.\end{cases}$ **8.** $\begin{cases}2x_2-\cos(x_1+1)=0;\\ x_1+\sin x_2=-0{,}4.\end{cases}$ **9.** $\begin{cases}\sin(x_1+2)-x_2=1{,}6;\\ x_1+\cos(x_2-2)=0{,}5.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\cos(x_1+0{,}5)-x_2=2;\\ \sin x_2-2x_1=1.\end{cases}$ **11.** $\begin{cases}\cos x_2+x_1=1{,}5;\\ 2x_2-\sin(x_1-0{,}5)=1.\end{cases}$ **12.** $\begin{cases}\sin(x_2+1)-x_1=1{,}2;\\ 2x_2+\cos x_1=2.\end{cases}$

13. $\begin{cases}\sin x_2+2x_1=2;\\ \cos(x_1-1)+x_2=0{,}7.\end{cases}$ **14.** $\begin{cases}\cos(x_2-1)+x_1=0{,}5;\\ x_2-\cos x_1=3.\end{cases}$ **15.** $\begin{cases}\cos(x_2+0{,}5)+x_1=0{,}8;\\ \sin x_1-2x_2=1{,}6.\end{cases}$

16. $\begin{cases}\sin(x_2-1)+x_1=1{,}3;\\ x_2-\sin(x_1+1)=0{,}8.\end{cases}$ **17.** $\begin{cases}\sin(x_2+0{,}5)-x_1=1;\\ \cos(x_1-2)+x_2=0.\end{cases}$ **18.** $\begin{cases}2x_1-\cos(x_2+1)=0;\\ x_2+\sin x_1=-0{,}4.\end{cases}$

19. $\begin{cases}\sin(x_2+2)-x_1=1{,}5;\\ x_2+\cos(x_1-2)=0{,}5.\end{cases}$ **20.** $\begin{cases}\cos(x_2+0{,}5)-x_1=2;\\ \sin x_1-2x_2=1.\end{cases}$ **21.** $\begin{cases}\sin(x_1+1)-x_2=1;\\ 2x_1+\cos x_2=2.\end{cases}$

22. $\begin{cases}\cos(x_1-1)+x_2=0{,}8;\\ x_1-\cos x_2=2.\end{cases}$ **23.** $\begin{cases}\cos x_1+x_2=1{,}2;\\ 2x_1-\sin(x_2-0{,}5)=2.\end{cases}$ **24.** $\begin{cases}\sin x_1+2x_2=1{,}6;\\ \cos(x_2-1)+x_1=1.\end{cases}$

25. $\begin{cases}\sin(x_1+0{,}5)-x_2=1{,}2;\\ \cos(x_2-2)+x_1=0.\end{cases}$ **26.** $\begin{cases}\cos(x_1-1)+x_2=1;\\ \sin x_2+2x_1=1{,}6.\end{cases}$ **27.** $\begin{cases}\cos(x_1+0{,}5)+x_2=1;\\ \sin x_2-2x_1=2.\end{cases}$

28. $\begin{cases}\sin(x_1-1)+x_2=1{,}5;\\ x_1-\sin(x_2+1)=1.\end{cases}$

Методические указания

Для применения метода систему уравнений (7.1) приводят к виду

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2,\dots,x_n);\\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_2,\dots,x_n);\\ &\dots\\ x_n &= \varphi_n(x_1, x_2,\dots,x_n). \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Задачей является определение величин $x_1^{\sim}, x_2^{\sim},\dots,x_n^{\sim}$, обращающих (7.3) в систему тождеств, или, по-другому, нахождение вектора-столбца $\mathbf{x}^{\sim} = [x_1^{\sim}, x_2^{\sim},\dots,x_n^{\sim}]$.

Составляют матрицу производных

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\\ \dots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \qquad (7.4)$$

Графически определяют начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}=[x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}]$. Далее производят уточнение корней. Для этого на основе уравнений (7.3) строят итерационный процесс определения (k+1)-го приближения $\mathbf{x}^{(k+1)}$ по известному $\mathbf{x}^{(k)}$. Каждая итерация включает:

1. Проверку условий сходимости итераций:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\right| \le \alpha < 1, \quad i=1,\dots,n, \qquad (7.5)$$

где $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ - значение частной производной j-й функции по i-й неизвестной, вычисленной в точке $\mathbf{x}^{(k)}$. Если условие (7.5) не выполняется, то вычисления прекращают и либо выбирают новое начальное приближение, либо используют иной способ приведения системы (7.1) к виду (7.3), обеспечивающий выполнение условий (7.5) в окрестности решения.

2. Вычисление (k+1)-го приближения:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)});\\
&x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)});\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}).
\end{aligned}
\qquad (7.6)
$$

3. Проверку попадания приближения в область, содержащую решение:

$$x_i^{*} \le x_i^{(k+1)} \le x_i^{**},\quad i=1,\dots,n. \qquad (7.7)$$

Если хотя бы одно из условий (7.7) не выполняется, то вычисления прекращают и производят новый расчет с измененными входными данными.

4. Проверку условия окончания итераций

$$\left[\begin{array}{l}\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| < \varepsilon;\\ k < k_{\max},\end{array}\right.$$

где ε – заданная малая погрешность вычислений (принять $\varepsilon=10^{-6}$);
$k_{\max}$ – максимальное количество итераций (принять $k_{\max}=100$).

Рекомендуется следующая структура программы. Программа, реализующая метод, оформляется в виде процедуры. Заголовок процедуры на языке Pascal

```
procedure nu_iter(n, maxi: byte;  eps: real;  xmin, xmax: arrN;  var x: arrN);
```

Входные параметры: n – размерность системы уравнений; maxi – максимальное количество итераций; eps – заданная погрешность вычислений; xmin, xmax – массивы значений, определяющих границы x_i^{*}, x_i^{**} области, содержащей решение; x – массив, включающий начальные приближения $x_i^{(0)}$. Результат вычислений: x – массив значений $x_i^{(k)}$;

```
type arrN = array [1..nm] of real.
```

Здесь константа nm определяет максимально возможную размерность системы уравнений.

Для вычисления правых частей уравнений (7.6) и нового приближения составляется процедура fii:

```
procedure fii(x : arrN;  var xn: arrN);
```

Здесь x – массив значений $x_i^{(k)}$; результат: xn – массив значений $x_i^{(k+1)}$. В процедуре fii записываются аналитические выражения функций φ_i.

Для проверки условий сходимости итераций разрабатывается процедура-функция prov:


```
function prov(x : arrN) : boolean;
```

Здесь x – массив значений $x_i^{(k)}$. Возвращаемое значение устанавливается равным False, если условие сходимости не выполняется. В теле функции prov записываются аналитические выражения производных $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$.

8. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

Задание

Дана система нелинейных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1,\ x_2,\dots,x_n) = 0;\\
&f_2(x_1,\ x_2,\dots,x_n) = 0;\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&f_n(x_1,\ x_2,\dots,x_n) = 0,
\end{aligned}
\qquad (8.1)
$$

где f_i - заданные функции; x_i - неизвестные.

Требуется:

1. Составить алгоритм и программу решения систем нелинейных уравнений размерности n методом Ньютона.
2. Для варианта задания графически найти область, содержащую решение системы: $x_1^{*} \le x_1 \le x_1^{**}$; $x_2^{*} \le x_2 \le x_2^{**}$, и определить начальные приближения $x_i^{(0)}$, $i=1,2$.

   Решение искать в области $x_1>0$; $x_2>0$.
3. Использовать разработанную программу для уточнения корней с заданной точностью.
4. Сделать выводы.

Варианты заданий (m – номер варианта)

1 – 4. $\begin{cases} tg(x_1x_2+\beta) = x_1^2;\\ \alpha x_1^2 + 2x_2^2 = 1,\end{cases}$ где $\alpha = 0{,}5 + 0{,}1\cdot m,\ \beta = 0{,}1\cdot m.$

5 – 8. $\begin{cases} \exp(x_1x_2) = x_1^2 - x_2 + \alpha;\\ (x_1+0{,}6)^2 + x_2^2 = \beta,\end{cases}$ где $\alpha = 0{,}7 + 0{,}1\cdot m,\ \beta = 0{,}6 + 0{,}1\cdot m.$

$$
9-12.\ \begin{cases} \cos(0{,}4x_2 + x_1^{\,2}) + x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = \alpha; \\ 1{,}5x_1^{\,2} - 3x_2^{\,2} = \beta, \end{cases} \quad \text{где } \alpha = 0{,}7 + 0{,}1\cdot m,\ \beta = 0{,}1\cdot m.
$$

$$
13-16.\ \begin{cases} 0.5x_2 - tg(x_1x_2 - \alpha) = 0; \\ (x_1^{\,2}+1)^2 - \sqrt{x_2^{\,3}} = \beta, \end{cases} \quad \text{где } \alpha = -1 + 0{,}1\cdot m,\ \beta = 2 + 0{,}1\cdot m.
$$

$$
17-20.\ \begin{cases} (x_1+0.3)^2 + 3x_2^{\,2} = \alpha; \\ (x_1-1)^2 + \ln x_2 + \beta\, x_1 = 0, \end{cases} \quad \text{где } \alpha = -1 + 0{,}1\cdot m,\ \beta = 1 + 0{,}1\cdot m.
$$

$$
21-24.\ \begin{cases} \exp(2x_1) = x_2^{\,2} - \ln x_1 + \alpha; \\ \sqrt{x_1^{\,3}} - tg\,(x_1x_2 - \beta) = 0, \end{cases} \quad \text{где } \alpha = 1 + 0{,}1\cdot m,\ \beta = 0{,}1\cdot m.
$$

$$
25-28.\ \begin{cases} x_1^{\,2} + x_2^{\,2} - \sin(x_1^{\,2} - 0.5x_2) = \alpha; \\ 3x_1^{\,2} - x_2^{\,2} = \beta^2, \end{cases} \quad \text{где } \alpha = -1 + 0{,}1\cdot m,\ \beta = -1{,}6 + 0{,}1\cdot m.
$$

Методические указания

Введем вектор-столбец неизвестных $\mathbf{x} = [\, x_1, x_2,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}$ и вектор-столбец функций $\mathbf{f} = [\, f_1, f_2,\ldots,f_n]^{\mathrm{T}}$. Тогда система уравнений (8.1) запишется в виде

$$
\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0. \qquad (8.2)
$$

Задачей является определение вектора-столбца $\mathbf{x}^{\tilde{}} = [\, x_1^{\tilde{}},\ x_2^{\tilde{}},\ldots,x_n^{\tilde{}}]$, обращающего (8.2) в векторное тождество.

Составляют матрицу производных

$$
\mathbf{F}_x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \qquad (8.3)
$$

Графически определяют начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}=[x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}]$. Далее производят уточнение корней. Для этого строят итерационный процесс определения $(k+1)$-го приближения $\mathbf{x}^{(k+1)}$ по известному $\mathbf{x}^{(k)}$. Каждая итерация включает:

1. Решение системы уравнений методом Гаусса:

$$
\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{h} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}). \qquad (8.4)
$$

Компоненты вектора-столбца $\mathbf{h}=[h_1,\ h_2,\ldots,h_n]$ включают значения приращений $x_i^{(k+1)}- x_i^{(k)}$; $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^{(k)})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ – матрица производных и вектор-столбец функций, вычисленные в точке $\mathbf{x}^{(k)}$.

Если в процессе решения системы (8.4) выясняется, что матрица $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^{(k)})$ – вырожденная, то вычисления прекращают и назначают новое начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$.

2. Вычисление $(k+1)$-го приближения:

$$
\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{h}. \qquad (8.5)
$$

3. Проверку попадания приближения в область, содержащую решение:

$$
x_i^{*} \le x_i^{(k+1)} \le x_i^{**}, \quad i=1,\ldots, n. \qquad (8.6)
$$

Если хотя бы одно из условий (8.6) не выполняется, то вычисления прекращают и производят новый расчет с измененными входными данными.

4. Проверку условия окончания итераций

$$
\left[\begin{array}{l} \left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| < \varepsilon; \\ k < k_{\max}, \end{array}\right.
$$

где ε – заданная малая погрешность вычислений (принять $\varepsilon=10^{-6}$);
$k_{\max}$ – максимальное количество итераций (принять $k_{\max}=100$).

Рекомендуется следующая структура программы. Программа, реализующая метод, оформляется в виде процедуры. Заголовок процедуры на языке Pascal

```
procedure nu_newt(n, maxi: byte;  eps: real;  xmin, xmax: arrN;  var x: arrN);
```

Входные параметры: n – размерность системы уравнений; maxi – максимальное количество итераций; eps – заданная погрешность вычислений; xmin, xmax – массивы значений, определяющих границы x_i^{*}, x_i^{**} области, содержащей решение; x – массив, включающий начальные приближения $x_i^{(0)}$. Результат вычислений: x – массив значений $x_i^{(k)}$;

```
type arrN = array [1..nm] of real.
```

Здесь константа nm определяет максимально возможную размерность системы уравнений.

Для вычисления вектора функций $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ составляется процедура ff:

```
procedure ff(x : arrN;  var f: arrN);
```

Здесь x – массив значений $x_i^{(k)}$; результат: f – массив значений f_i. В теле процедуры ff записываются аналитические выражения функций f_i.

Для вычисления элементов матрицы $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^{(k)})$ разрабатывается процедура dfx:

```
procedure dfx(x : arrN; var fx : martN);
```

Здесь x – массив значений $x_i^{(k)}$. В теле функции dfx записываются аналитические выражения производных $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$; результат: массив fx, включающий элементы матрицы $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}^{(k)})$;

```
type matrN = array [1..n] of array [1..n] of real.
```

Для решения системы (8.4) используется процедура gauss (см. разд. 3).

9. Метод Рунге-Кутта численного решения задачи Коши

Задание

1. Используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка, составить алгоритм и программу численного решения задачи Коши, включающей систему n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, вида
$$y'_i = f(t,\ y_1,\dots,y_n), \qquad i = 1,\dots,n, \tag{9.1}$$
с начальными условиями
$$y_i(t = t_0) = y_{i0}, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{9.2}$$
2. Заданное уравнение n-го порядка свести к нормальной форме (9.1) и найти численное решение для $t \in [0,3]$. Сравнить полученное решение с аналитическим решением.
3. Найти значение шага Δt, при котором метод теряет устойчивость.
4. Оценить погрешность решения при выбранном шаге и сделать выводы.

Варианты заданий

№ варианта	Дифференциальное уравнение	Начальные условия при t=0	
		y	y'
1.	$y'' + 1001\,y' + 1000\,y = 200\,t + 200.2$	1	-0.8
2.	$y'' + 1002\,y' + 2000\,y = 200\,t + 100.2$	1	-1.9
3.	$y'' + 1003\,y' + 3000\,y = 300\,t + 100.3$	0.5	-1.4
4.	$y'' + 1004\,y' + 4000\,y = 400\,t + 100.4$	2	-7.9
5.	$y'' + 1001\,y' + 1000\,y = 1000\,t + 1001$	1	0
6.	$y'' + 1002\,y' + 2000\,y = 2000\,t + 1002$	1	-1
7.	$y'' + 1003\,y' + 3000\,y = 3000\,t + 1003$	1	-2
8.	$y'' + 1004\,y' + 4000\,y = 4000\,t + 1004$	1	-3
9.	$y'' + 2001\,y' + 2000\,y = 1000\,t + 1000.5$	2	-1.5
10.	$y'' + 2002\,y' + 4000\,y = 1000\,t + 500.5$	2	-3.75
11.	$y'' + 2004\,y' + 8000\,y = 2000\,t + 501$	2	-7.75
12.	$y'' + 501\,y' + 500\,y = 500\,t + 501$	2	-1
13.	$y'' + 502\,y' + 1000\,y = 500\,t + 251$	1	-1.5
14.	$y'' + 503\,y' + 1500\,y = 450\,t + 150.9$	2	-5.7
15.	$y'' + 504\,y' + 2000\,y = 500\,t + 126$	2	-7.75
16.	$y'' + 1001\,y' + 1000\,y = 500\,t + 500.5$	-1	1.5
17.	$y'' + 1003y' + 3000\,y = 600\,t + 200.6$	-2	6.2
18.	$y'' + 1003\,y' + 3000\,y = 1200\,t + 401.2$	-2	6.4
19.	$y'' + 1004\,y' + 4000\,y = 1200\,t + 301.2$	-1	4.3
20.	$y'' + 501\,y' + 500\,y = 400\,t + 400.8$	-2	2.8
21.	$y'' + 502\,y' + 1000\,y = 1000\,t + 502$	-2	5
22.	$y'' + 503\,y' + 1500\,y = 1500\,t + 503$	-1	4
23.	$y'' + 503\,y' + 1500\,y = 2000\,t + 504$	-1	5
24.	$y'' + 504\,y' + 2000\,y = 2000\,t + 2004$	-2	6
25.	$y'' + 502\,y' + 1000\,y = 2000\,t + 1004$	-1	4
26.	$y'' + 503\,y' + 1500\,y = 3000\,t + 1006$	-2	8
27.	$y'' + 2001\,y' + 2000\,y = 2000\,t + 2001$	1	0
28.	$y'' + 2001\,y' + 2000\,y = 2000\,t + 2001$	2	-1

Методические указания

Введем векторы размерности n:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; \; \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{bmatrix}; \; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t,\mathbf{y}) \\ f_2(t,\mathbf{y}) \\ \dots \\ f_n(t,\mathbf{y}) \end{bmatrix}.$$

Тогда система (9.1) перепишется в виде

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \qquad (9.3)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \qquad (9.4)$$

Процесс вычислений $\mathbf{y}(t)$ для $t \in [t_0, t_N]$ заключается в пошаговом определении вектора $\mathbf{y}_{k+1} \approx \mathbf{y}(t_{k+1})$ с использованием известного $\mathbf{y}_k$. Здесь $t_k = t_0 + kh$ $(k=0,1,2,\dots;$ $h = \Delta t$ - шаг интегрирования). В методе Рунге-Кутта процесс вычислений основан на соотношениях:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k); \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{\mathbf{k}_1}{2}); \\ \mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{\mathbf{k}_2}{2}); \\ \mathbf{k}_4 &= h\mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{y}_k + \mathbf{k}_3); \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4); \end{aligned} \qquad (9.5)$$

Количественная оценка локальной погрешности на $(k+1)$-м шаге e_{k+1} может быть найдена как $e_{k+1} = \| \mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1} \|$, где $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ – значение, найденное с удвоенным шагом с использованием $\mathbf{y}_{k-1}$.

Для приведения уравнения n-го порядка к нормальной форме (9.1) используют замену переменных: $y_1 = y;$ $y_2 = y';$ $\dots;$ $y_n = y^{(n-1)}$.

Для нахождения значения шага h^*, при котором метод теряет устойчивость, проводят повторные расчеты с различными значениями h. Результат сравнивают с аналитической оценкой h^*.

Рекомендуется следующая структура программы. Программа, реализующая метод, оформляется в виде процедуры. Заголовок процедуры на языке Pascal


```
procedure rk4(n : byte;  t0, tk : real,  var h : real;  var Y : arrN);
```

Входные параметры: n – размерность системы ОДУ; t0, tk – границы интервала изменения аргумента; h – величина шага; Y – массив начальных значений функций y_i. Результат: Y – массив значений функций y_i, соответствующих значению аргумента tk.

```
type arrN = array [1..nm] of real.
```

Для вычисления правых частей уравнений (9.1) используется процедура fct:

```
procedure fct(t : real;  Y : arrN;  var F: arrN);
```

Входные параметры: t – значение аргумента; Y – массив значений y_i; результат: F– массив значений f_i.

Для вывода результатов решения t_k, $\mathbf{y}_k$, $\mathbf{f}_k$, проверки условий изменения величины шага h, а также условий выхода из процедуры rk4 используется процедура out, вызываемая перед выполнением очередного шага:

```
procedure out(t : real;  var h : real;  Y,F : arrN;  var kext : integer);
```

Входные параметры: t – значение аргумента; Y – массив значений y_i; F – массив значений f_i; результат: h – измененное значение шага; kext<>0 – условие окончания решения.

10. Метод Адамса "прогноз-коррекция" численного решения задачи Коши

Задание

1. Используя метод Адамса типа "прогноз-коррекция" 4-го порядка, составить алгоритм и программу численного решения задачи Коши, включающей систему n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, вида

$$y'_i = f(t,\ y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n, \qquad (10.1)$$

с начальными условиями

$$y_i(t = t_0) = y_{i0}, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (10.2)$$

2. Заданное уравнение n-го порядка свести к нормальной форме (10.1) и найти численное решение для $t \in [0,3]$. Сравнить полученное решение с аналитическим решением.
3. Найти значение шага Δt, при котором метод теряет устойчивость.
4. Оценить погрешность решения при выбранном шаге и сделать выводы.

Варианты заданий

Варианты заданий взять из разд. 9.

Методические указания

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение, эквивалентное (10.1),

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

с начальными условиями

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

Из (10.1) найдем $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0)$. Пусть каким-либо образом найдены также значения векторов $\mathbf{y}_1$; $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1)$; $\mathbf{y}_2$; $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(t_2, \mathbf{y}_2)$; $\mathbf{y}_3$; $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}(t_3, \mathbf{y}_3)$. Дальнейший процесс вычислений $\mathbf{y}_{k+1}$, $\mathbf{f}_{k+1}$, соответствующих значениям аргумента $t_k = t_0 + kh$ (k=3,4,... ; h – шаг интегрирования), основан на соотношениях:

- *прогноз:*

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{24}\left(55\mathbf{f}_k - 59\mathbf{f}_{k-1} + 37\mathbf{f}_{k-2} - 9\mathbf{f}_{k-3}\right),$$
$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1} = \mathbf{f}(t_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}); \tag{10.3}$$

- *коррекция:*

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{24}\left(9\tilde{\mathbf{f}}_{k+1} + 19\mathbf{f}_k - 5\mathbf{f}_{k-1} + \mathbf{f}_{k-2}\right),$$
$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}). \tag{10.4}$$

Оценка погрешности может быть найдена как норма вектора разницы между прогнозом $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ и коррекцией $\mathbf{y}_{k+1}$. Если $\|\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1}\| > \varepsilon$, где ε – допустимая локальная погрешность, то следует уменьшить величину шага h.

Инициализация метода, включающая вычисление $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, может быть проведена путем трехкратного обращения к процедуре, реализующей метод Рунге-Кутта с меньшим, чем h, шагом в целях уменьшения погрешности на начальном этапе расчетов. В результате k-го обращения определяется

численное решение на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, вектор $\mathbf{y}_k$ и далее из системы ОДУ (10.1) - вектор $\mathbf{f}_k$.

Для нахождения значения шага h^*, при котором метод теряет устойчивость, проводят повторные расчеты с различными значениями h.

11. Метод прогонки решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

Задание

1. Используя метод прогонки, составить алгоритм и программу решения краевой задачи для функции $y(x)$, $x \in [a, b]$, включающей ОДУ второго порядка,вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{11.1}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - заданные функции аргумента x, а также граничные условия

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = c_3; \qquad d_1 y(b) + d_2 y'(b) = d_3. \tag{11.2}$$

2. Использовать программу для решения заданного варианта.
3. Сравнить полученное решение с аналитическим решением. Оценить погрешность решения при выбранном шаге и сделать выводы.

Варианты заданий

№ варианта	Дифференциальное уравнение	Интервал a	Интервал b	Граничные условия при $x=a$	Граничные условия при $x=b$	Аналитическое решение
1	2	3	4	5	6	7
1.	$y'' + y = 1$	0	$\pi/2$	$y'=0$	$y-y'=2$	
2.	$y'' + y = x$	0	$\pi/2$	$y'=1$	$y'=0$	
3.	$y'' - 2xy' - 2y = -4x$	0	1	$y-y'=0$	$y=1+e$	$y(x) = x + exp(x^2)$
4.	$y'' - y = -2$	0	1	$y=2$	$y'=ch(1)$	
5.	$y'' - 4y = 4$	0	1	$y=0$	$y'=2sh(1)$	
6.	$y'' + 4y = 4x$	0	$\pi/2$	$y'=1$	$y=\pi/2 - 1$	
7.	$y'' - 2xy' - 2y = -4x$	0	1	$y=1$	$2y-y'=1$	$y(x) = x + exp(x^2)$
8.	$y'' + y = 2$	0	$\pi/2$	$y'=0$	$y-y'=4$	

1	2	3	4	5	6	7
9.	$y'' - y = -x$	0	1	y=0	$y'=1+ch(1)$	
10.	$y'' + 4y = -x$	0	$\pi/2$	y=0	$y'= 3/4$	
11.	$y'' - y = 2x$	0	1	y=0	y=-1	
12.	$y'' + y' = 1$	0	1	y'=0	y=1	
13.	$y'' - y' = 0$	0	1	y=-1	y'-y=2	
14.	$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$	0	1	y=0	y=3	$y(x) = 3x^2$
15.	$x^2 y'' - 6y = 0$	0	1	y=0	y=2	$y(x) = 2x^3$
16.	$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$	0	1	y=0	y=2	$y(x) = 2x^2$
17.	$x^2 y'' - 6y = 0$	0	1	y=0	y=1	$y(x) = x^3$
18.	$(2x+1)\, y''+4xy'-4y = 0$	0	1	y=0	$y=1-e^{-2}$	$y(x) = x + exp(-2x)$
19.	$xy''-(2x+1)\, y'+(x+1)y= 0$	0	1	y=1	y=2e	$y(x) =e^x\,(x^2 + 1)$
20.	$xy''-(2x+1)\, y'+(x+1)y= 0$	0	1	y=1	y=4e	$y(x) =2e^x\,(x^2 + 1)$

Методические указания

Разбив отрезок $[a,\ b]$ на N равных частей с шагом $h=(b-a)/N$, получают точки $x_i=a+ih$ $(i=0,1,\ldots,N)$, в которых требуется найти искомые значения $y_i=y(x_i)$. Обозначая $p_i=p(x_i)$, $q_i=q(x_i)$, $f_i=f(x_i)$ и заменяя производные конечными разностями первого порядка, из (11.1) и (11.2) получают:

- для внутренних узлов

$$\frac{1}{h^2}(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})+\frac{p_i}{2h}(y_{i+1}-y_{i-1})+q_iy_i=f_i,\ \ i=1,\ldots,N-1; \qquad (11.3)$$

- для граничных узлов

$$c_1y_0+c_2\frac{y_1-y_0}{h}=c_3; \qquad d_1y_N+d_2\frac{y_N-y_{N-1}}{h}=d_3. \qquad (11.4)$$

Уравнения (11.3) преобразуют к виду

$$\alpha_i y_{i+1}+\beta_i y_i+\gamma_i y_i=\delta_i, \qquad i=1,\ldots,N-1, \qquad (11.5)$$

где

$$\alpha_i=1+\frac{h}{2}p_i; \quad \beta_i=-2+q_ih^2; \quad \gamma_i=1-\frac{h}{2}p_i; \quad \delta_i=f_ih^2. \qquad (11.6)$$

Решение уравнений (11.4), (11.5) ищут в виде

$$y_i=a_iy_{i+1}+b_i. \qquad (11.7)$$

Процесс решения распадается на два этапа – прямой и обратный ход прогонки. При этом используют следующий алгоритм:

1. Прямой ход прогонки – последовательное определение коэффициентов a_i, b_i:
   - из первого соотношения (11.4) определяют
   $$a_0=-\frac{c_2}{c_1h-c_2}; \qquad b_0=\frac{c_3h}{c_1h-c_2};$$
   - для i=1,…,N-1:
     - вычисляют коэффициенты α_i, β_i, γ_i, δ_i по формуле (11.6);
     - определяют a_i, b_i по формулам, следующим из (11.5) и (11.7):
     $$a_i=-\frac{\alpha_i}{\beta_i+\gamma_ia_{i-1}}; \qquad b_i=\frac{\delta_i-\gamma_ib_{i-1}}{\beta_i+\gamma_ia_{i-1}}.$$
2. Обратный ход прогонки – определение y_i:
   - из второго соотношения (11.4)
   $$y_N=\frac{d_2b_{N-1}+d_3h}{d_1h+d_2(1-a_{N-1})};$$
   - для i=N-1,…,0 используется (11.7).

12. Метод Ритца в задаче определения прогиба балки

Задание

1. Составить алгоритм и программу численного решения задачи о прогибе шарнирно опертой балки переменного сечения $w(x)$ под действием поперечной распределенной нагрузки $q(x)$ методом Ритца. Перемещение разыскивается в классе тригонометрических функций (n=4):
$$w(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\sin\frac{i\pi x}{L}. \qquad (12.1)$$
2. Составить тестовую задачу для балки постоянного сечения и сравнить полученное численное решение с аналитическим.
3. Для заданного варианта распределенной нагрузки $q(x)$ и изгибной жесткости балки $EJ(x)$ найти зависимость $w(x)$.
4. Сделать выводы.

Варианты заданий

№ варианта	Нагрузка q, Н/м	Изгибная жесткость EJ, Н·м^2	Длина балки L, м
1	2	3	4
1.	$\frac{x}{L}$	$100\left(2-\cos\frac{\pi x}{L}\right)$	3
2.	$-\frac{x}{L}$	$100\left(2+\sin\frac{\pi x}{L}\right)$	3
3.	$1-\frac{x}{L}$	$100\left(3+\sin\frac{2\pi x}{L}\right)$	4
4.	$1-\frac{x}{L}$	$100\left(3+\sin^2\frac{2\pi x}{L}\right)$	4
5.	$1-\frac{2x}{L}$	$50\left(1+\sin\frac{\pi x}{L}\right)$	5
6.	$2-\frac{2x}{L}$	$100\left(2+\cos\frac{\pi x}{L}\right)$	4
7.	$3-\frac{2x}{L}$	$100\left(3+\cos\frac{\pi x}{L}\right)$	3
8.	$\frac{2x}{L}-1$	$50\left(3+\cos\frac{2\pi x}{L}\right)$	5
9.	$\left(\frac{2x}{L}-1\right)^2$	$100\left(2+\cos\frac{2\pi x}{L}\right)$	4
10.	$1+\left(\frac{2x-L}{L}\right)^2$	$100\left(1+\sin\frac{\pi x}{L}\right)$	4
11.	$1-\left(\frac{2x-L}{L}\right)^2$	$100\left(3-e^{\frac{x}{2L}}\right)$	3
12.	$2-\left(\frac{2x-L}{L}\right)^2$	$100\left(2+x-e^{\frac{x}{2L}}\right)$	3
13.	$\left(\frac{2x-L}{L}\right)^2-3$	$100\left(3+x-e^{\frac{x}{L}}\right)$	2

1	2	3	4
14.	$\left(\frac{x}{L}\right)^3$	$100\left(2+\sin\frac{\pi x}{2L}\right)$	4
15.	$\sin\frac{\pi x}{L}$	$100\left(2-\frac{x}{2L}\right)$	3
16.	$\sin\frac{2\pi x}{L}$	$100\left(3-\frac{2x}{L}\right)$	5
17.	$\cos\frac{2\pi x}{L}$	$100\left(2-\frac{x}{L}\right)$	5
18.	$\sin^2\frac{2\pi x}{L}$	$100\left(2+\left(\frac{2x-L}{L}\right)^2\right)$	4
19.	$1+\sin\frac{\pi x}{L}$	$100\left(3-\left(\frac{2x-L}{L}\right)^2\right)$	3
20.	$1+\sin^2\frac{2\pi x}{L}$	$100\left(2-\left(\frac{2x-L}{L}\right)^2\right)$	4

Методические указания

Поперечное смещение (прогиб) балки $w(x)$ может быть найдено как решение вариационной задачи – задачи определения минимального значения функционала

$$\varPhi=\frac{1}{2}\int_0^L EJ(w'')^2dx-\int_0^L qwdx. \qquad (12.2)$$

Разыскивая прогиб балки в виде (12.1), приходим к системе n алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_i, матричная форма которой имеет вид

$$\mathbf{Ba}=\mathbf{f}, \qquad (12.3)$$

где $\mathbf{B}=[b_{ij}]$; $\mathbf{a}=[a_1,\ldots,a_n]^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{f}=[f_1,\ldots,f_n]^{\mathrm{T}}$;

$$b_{ij}=i^2j^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\int_0^L EJ\sin\frac{i\pi x}{L}\sin\frac{j\pi x}{L}dx; \qquad f_i=\int_0^L q\sin\frac{i\pi x}{L}dx. \qquad (12.4)$$

Интегралы (12.4) вычисляются с использованием квадратурных формул Гаусса. В применении к данной задаче квадратурная формула для вычисления интеграла $I = \int_0^L F(x)dx$ имеет вид

$$I = \frac{L}{2}\sum_{k=1}^{m} W_k F(x_k), \qquad (12.5)$$

где

$$x_k = \frac{L}{2}(1+\xi_k).$$

Весовые коэффициенты W_k и абсциссы узлов ξ_k зависят от порядка квадратурной формулы. Приняв m=5, получим

k	ξ_k	W_k
1	0	0,568889
2,3	± 0,538469	0,478629
4,5	± 0,906180	0,236927

Рекомендуется следующий алгоритм решения задачи:

1. Вычислить интегралы (12.4) по формуле (12.5).
2. Вычислить коэффициенты a_i из системы уравнений (12.3).
3. Для 20–40 равноотстоящих узлов $x_j=jh$ (h - выбранный шаг по координате) вычислить значения $w(x_j)$:

$$w(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin\frac{i\pi x_j}{L}.$$

4. По найденным узловым значениям прогиба балки построить график $w(x)$.

Аналитическое решение тестовой задачи о прогибе шарнирно опертой балки постоянного сечения под действием поперечной распределенной нагрузки $q(x)$ может быть получено интегрированием дифференциального уравнения

$$EJw'''' = q(x)$$

с граничными условиями

$$w(0) = w(L) = 0;$$
$$w''(0) = w''(L) = 0.$$

Библиографический список

1. **Волков Е.А.** Численные методы: Учебное пособие для вузов.- М.: Наука, 1987.- 248 с.
2. **Воробьева Г.Н., Данилова А.Н.** Практикум по численным методам: Учебное пособие для техникумов.- М.: Высшая школа, 1979. - 184 с.
3. **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики.- М.: Наука, 1970.- 664 с.
4. **Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.** Численные методы анализа.- М.: Наука, 1963.- 400 с.
5. **Киреев В.И., Пантелеев А.В.** Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие.- М.: Изд-во МАИ, 2000.- 376 с.
6. **Копченова Н.В., Марон И.А.** Вычислительная математика в примерах и задачах.- М.: Наука, 1972.- 368 с.
7. **Пирумов У.Г.** Численные методы: Учебное пособие.- М.: Изд-во МАИ, 1998.- 188 с.