Цель данной работы – изучение основных методов приближённого интегрирования. Наиболее общеупотребительными приближенными методами вычисления одномерных определенных интегралов являются: метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол (основанные на суммировании элементарных площадей, на которые разбивается вся площадь под функцией ).

**Приближённые методы вычисления.**

Как известно, если функция *f* непрерывна на промежутке, то на этом промежутке существует функция *F* такая, что *F′*=*f*, то есть существует первообразная для функции *f*, но не всякая элементарная функция *f* имеет элементарную первообразную *F*.

Бывает, что на практике сталкиваются с вычислением интегралов от функций, которые заданы табличными и графическими способами, или интегралы от функций, первообразные которых выражаются через элементарные функции очень сложно, что не удобно, долго и не рационально.

В основе приближённых методов интегрирования лежит геометрический смысл определённого интеграла. Формул приближённого интегрирования существует много. Рассмотрим три основных метода приближённого интегрирования: метод трапеций, метод прямоугольников и метод Симпсона.

***1.Формула прямоугольников.***

Пусть требуется вычислить определённый интеграл: , где функция *y* = *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*,*b*]. Разделим отрезок [*a*,*b*] точками *a* = *x*0,*x*1,*x*2,…,*xn* = *b* на *n* равных частей длины Δ*х*, где Δх=(*b*−*a*)/*n*.

*b=xn*

*a=x*0

*x*1

*y*0

*y*1

*yn*

*y*=*f*(*x*)

Обозначим через *y*0,*y*1,*y*2,…,*yn*-1,*yn* значение функции *f*(*x*) в точках *x*0,*x*1,*x*2,…,*xn*, то есть, если записать в наглядной формуле:

*y*0=*f*(*x*0), *y*1=*f*(*x*1), *y*2=*f*(*x*2)…*yn* =*f*(*xn*).

В данном способе подынтегральную функцию заменяем функцией, которая имеет ступенчатый вид (на рис. выделена).Составим суммы:

;

.

Каждое слагаемое этих сумм выражает площадь, полученных прямоугольников с основанием Δ*х*, которое является шириной прямоугольника, и длиной выраженной через *yi*. Каждая из этих сумм является интегральной суммой для *f*(*x*) на отрезке [*a*,*b*], и равна площади ступенчатых фигур, а значит приближённо выражает интеграл. Вынесем из каждой суммы, получим:

 (1)

 (2)

Это и есть формулы прямоугольников. Ошибка, совершаемая при вычислении интегралов по формуле прямоугольников, будет тем меньше, чем больше число *n* (то есть чем меньше шаг деления). Для вычисления погрешности этого метода используется формула: , где  Результат полученный по формуле (1) заведомо даёт большую площадь прямоугольника, так же по формуле (2) даёт заведомо меньшую площадь, для получения среднего результата используется формула средних прямоугольников: 

***2.Формула трапеций.***

При вычислении интеграла с помощью формулы трапеций подынтегральная функция f заменяется функцией, график которой представляет собой ломанную линию (на рисунке 2 красным цветом), звенья которой соединяют концы ординат *yi*-1 и *yi* (*i*=1,2,…,*n*). Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

*a*

*b*

*x*1

*y*0

*y*1

*yn*

Заменившая функция

Заменяемая функция

*x*=*a*, *x*=*b*, *y*=0, *y*=*f*(*x*),

а значит и значение интеграла, приблизительно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями *yi*-1 и *yi* и высотой . Получаем, что площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме обыкновенных трапеций.

Итак, запишем сказанное выше в математическом виде:



Эта формула и есть формула трапеций.

Для определения погрешности интеграла вычисленного с помощью формулы трапеций используется формула:где .

***3.Формула Симпсона (формула парабол).***

Разделим отрезок [*a*;*b*] на чётное число равных частей *n*=2*m*. Площадь криволинейной трапеции, соответствующей первым двум отрезкам [*x*0,*x*1], [*x*1,*x*2] и ограниченной заданной кривой *y*=*f*(*x*), заменим площадью криволинейной трапеции, которая ограничена параболой второй степени, проходящей через три точки *M*0[*x*0,*y*0], *M*1[*x*1,*y*1], *M*2[*x*2,*y*2] и имеющей ось, параллельную оси Oy (рис). Такую криволинейную трапецию будем называть параболической трапецией. Уравнение параболы с осью, параллельной оси Oy, имеет вид: . Коэффициенты *A*, *B* и *C* однозначно определяются из условия, что парабола проходит через три заданные точки. Аналогичные параболы строятся и для других пар отрезков. Сумма параболических трапеций и даст приближённое значение интеграла. Площадь одной параболической трапеции находят используя следующую лемму.

*M*0

*M*1

*M*2

*x*0=*a*

*xn*=*b*

***Лемма:*** если криволинейная трапеция ограничена параболой , осью O*x* и двумя ординатами, расстояние между которыми равно 2*h*, то её площадь равна: , где *y*0 и *y*2- крайние ординаты, а *y*1- ордината кривой в середине отрезка.

Учитывая, что  можно получить



Это и есть формула Симпсона. Здесь число точек деления произвольно, но чем это число больше, тем точнее сумма в правой части равенства даёт значение интеграла. Формула Симпсона даёт самое точное значение интеграла (из классических формул приближённого интегрирования), погрешность для этого метода находится по формуле:  где 

**Пример.**

Общий вид интеграла, решение которого, будет рассмотрено в этом разделе: .Заданные значения: a=0; c=0,3; m=2; b=3; k=7.Подставим заданные значения получим.

Найдем точное решение интеграла применяя метод замены:



Разделим отрезок [0;3] на *n*=10 равных частей и найдём шаг деления: 

Найдём значение подынтегральной функции:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,4 | 2,7 | 3 |
| *y* | 0 | 0,289 | 1,007 | 2,199 | 3,866 | 6,009 | 8,628 | 11,724 | 15,296 | 19,344 | 23,868 |

1. ***Формула прямоугольников:***

Входящих



Выходящих



Средних

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0,15 | 0,45 | 0,75 | 1,05 | 1,35 | 1,65 | 1,95 | 2,25 | 2,55 | 2,85 |
| *y* | 0,101458 | 0,58974 | 1,543889 | 2,973095 | 4,878247 | 7,259531 | 10,11701 | 13,45069 | 17,2606 | 21,54674 |



Определим погрешность метода прямоугольников:.

1. ***Формула трапеций***



Определим погрешность метода трапеции:



М2 – максимальное значение второй производной на данном промежутке.

1. ***Формула Симпсона.***



Определим погрешность метода Симпсона:

.

*М*4 – максимальное значение четвёртой производной на данном промежутке.

**Задание.**

Вычислить интегралы с помощью метода прямоугольников, трапеций и Симпсона. Шаг выбрать самостоятельно. Определить погрешность вычислений для всех трех методов.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 